Universidade Federal Rural de Pernambuco
Unidade Acadêmica do Cabo de Santo Agostinho

Caderno de Questões
Cálculo Diferencial e Integral III

Prof.ª Sylvia Ferreira da Silva

Conteúdo

1 Tópicos Preliminares **3**
1.1 Cônicas e Quádricas 3
1.2 Funções reais a várias variáveis reais. 4
1.3 Integrais Múltiplas e mudança de variável. 4

2 Funções Vetorias **5**
2.1 Funções vetoriais. 5
2.2 Curvas Parametrizadas. Comprimento de arco. 6
2.3 Campos Vetoriais 6

3 Integrais de Linha **7**
3.1 Integrais de linha de funções escalares. 7
3.2 Integrais de linha de Campos vetoriais. 8
3.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha.O Teorema de Green 8

4 Integrais de Superfícies **9**
4.1 Superfícies Parametrizadas. Plano Tangente. 9
4.2 Área de superfícies. 10
4.3 Integrais de superfícies 10
4.4 Orientação. Interais de Superfícies de Campos Vetoriais 11
4.5 O Teorema de Stokes. O Teorema do Divergente. 11

Caderno de exercícios para a disciplina de Cálculo 1

i) Este arquivo contém uma série de exercícios que estão separados por temase referem-se aos conteúdos que serão abordados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I durante todo o semestre letivo.

ii) É importante salientar que estes exercícios fazem parte de um material complementar às aulas, donde outros tipos de exercícios podem também ser apresentados. Além disso, é importante que o(a) aluno(a) não se limite a este material.

iii) Com o decorrer do curso, este material poderá sofrer alterações e acréscimos. Sendo assim, é importante fazer o download de sua versão mais atualizada. As versões serão indicadas no nome do arquivo a ser disponibilizado no sigaa.

1 Tópicos Preliminares

Nesta seção são propostos alguns exercícios envolvendo tópicos de Cálculo Diferencial e Integral I, Cálculo Diferencial e Integral II e Geometria Analítica com o intuito de reforçar conteúdos prévios e importantes para o desenvolvimento deste curso. É importante destacar, que esta seção é apenas de revisão e, portanto, é opcional. Caso a(o) aluna(o) deseje, esta pode ser descartada.

1.1 Cônicas e Quádricas

1. Escreva as equações cartesiana e paramétricas do plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $5x + y - 3z + 6 = 0$.

2. Determine as equações paramétricas e cartesiana do plano que contém os pontos $A(7, 2, -3)$ e $B = (5, 6, -4)$ e é paralelo ao eixo $0x$.

3. Identifique e esboce as cônicas a seguir:

   a) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1;$
   b) $2(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 5;$
   c) $x^2 + y^2 - 2x = 0$
   d) $y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$
   e) $2x^2 - 3y^2 = 6$
   f) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$
   g) $x^2 - 2y = 0$
   h) $\dfrac{3(x-1)^2}{4} - \dfrac{5(y+1)^2}{9} = 1$

4. Identifique e esboce as quádricas a seguir

   a) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4;$
   b) $36x^2 + y^2 + 9z^2 = 9;$
   c) $3x^2 - 8y^2 + 4z^2 = 1;$
   d) $z = 4x^2 + y^2;$
   e) $16z = 4x^2 - y^2;$
   f) $x^2 = 2y^2 + 3z^2;$
   g) $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0;$
   h) $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36;$
   i) $x = 2y^2 + 3z^2;$
   j) $y^2 + z^2 = 4;$
   k) $x^2 - y^2 = 1.$

5. Esboce a região no espaço delimitada pelo plano $z = 0$, $z = 4$ e o parabolóide de equação $4x^2+4y^2 = cz$.

6. Esboce a região no espaço, delimitada pelo plano $x + y = z$ e a esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. Esboce a região formada com a intersecção das esferas de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

1.2 Funções reais a várias variáveis reais.

1. Determine o domínio e a imagem das funções a seguir.

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y}$;
   (b) $f(x,y) = \dfrac{1-x}{y^2-x^2}$;
   (c) $f(x,y) = \sqrt{|x|-|y|}$;
   (d) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2+y^2-z^2}$;

2. Desenhe a região que representa o domínio de cada função a seguir.

   (a) $f(x,y) = \sqrt{x+y-1}$
   (b) $f(x,y,z) = \sqrt{4-x^2-9y^2-5z^2}$
   (c) $f(x,y) = ln(2x^2-y^2+1)$
   (d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{sen\ x - sen\ y}$

3. Determine as derivadas parciais.

   (a) $f(x,y) = 5x^4y^2 + xy^3 + 4$
   (b) $z = \cos(xy)$
   (c) $z = \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$
   (d) $f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$
   (e) $z = x^2\ln(1+x^2+y^2)$
   (f) $f(x,y,z) = \arctan\dfrac{x-z^2}{y}$
   (g) $f(x,y,z) = \sqrt[5]{x^3+y^2-3z}$
   (h) $f(x,y,z) = x^{yz}$

1.3 Integrais Múltiplas e mudança de variável.

4. Calcule $\displaystyle\int\int_B f(x,y)\ dxdy$, sendo dados:

   (a) $f(x,y) = x\cos y$ e $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\geq 0, x^2\leq y\leq \pi\}$;
   (b) $f(x,y) = xy$ e $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\leq 2, y\leq x \quad 2 \quad x\geq 0\}$;
   (c) $f(x,y) = x+y$ e B é a região compreendida entre os gráficos de $y=x$ e $y=e^x$, com $0\leq x\leq 1$;
   (d) $f(x,y) = \sqrt{1+y^3}$ e $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \sqrt{x}\leq y\leq 1\}$.

5. Calcule a integral, trocando a ordem de integração

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\ dxdy$;
   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{y^3+1}\ dydx$;
   (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}}\int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\ dxdy$;
   (d) $\displaystyle\int_0^8\int_{\sqrt[3]{y}}^8 e^{x^4}\ dxdy$;
   (e) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\ dydx$;

6. Calcule a integral dada utilizando a mudança de coordenada para coordenadas polares

   (a) $\displaystyle\int\int_D xydA$, onde D é o disco de centro na origem e raio 3;
   (b) $\displaystyle\int\int_R (x+y)dA$, onde R é a região que está à esquerda do eixo y e entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$;
   (c) $\displaystyle\int\int_B x^2\ dxdy$ em que $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$;

7. Calcule as integrais triplas a seguir

   (a) $\displaystyle\int\int\int_E 2x\ dV$, onde $E = \{(x,y,z) | 0\leq y\leq 2, 0\leq x\leq \sqrt{4-y^2}\}$;

(b) $\int\int\int_E yz\cos(x^5)\, dV$, onde $E = \{(x,y,z)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq z \leq 2x\}$;

(c) $\int\int\int_E x^2 e^y\, dV$, onde E é delimitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$;

(d) $\int\int\int_E x\, dV$, onde E é limitado pelo parabolóide $x = 4y^2 + 4z^2$ e pelo plano $x = 4$;

2 Funções Vetorias

2.1 Funções vetoriais.

1. Desenhe a imagem

   (a) $F(t) = (1, t)$;

   (b) $F(t) = (2t - 1, t + 2)$;

   (c) $F(t) = (t^2, t^4)$;

   (d) $F(t) = (\cos t, 2\sin t)$;

   (e) $F(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$; $t \geq 0$

   (f) $F(t) = (t^2, t^4)$;

   (g) $F(t) = (t, t, t^2)$;

   (h) $F(t) = (\sin t, \sin t, \sqrt{2}\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

2. Determie o domínio de F

   (a) $F(t) = \left(t, \sqrt{\dfrac{t-2}{t+1}}, \ln(5 - t^2, e^{-t})\right)$;

   (b) $F(t) = \left(2, \dfrac{1}{t}, \arctan t\right)$.

3. Calcule

   (a) $\lim_{t\to 1} \vec{F(t)}$, onde $\vec{F(t)} = \left(\dfrac{\sqrt{t} - 1}{t - 1}, t^2, \dfrac{t-1}{t}\right)$;

   (b) $\lim_{t\to 0} \vec{F(t)}$ onde $\vec{F(t)} = \left(\dfrac{\tan 3t}{t}, \dfrac{e^t - 1}{t}, t^3\right)$

4. Determine a equação da reta tangente à $F(t)$ no ponto indicado.

   (a) $F(t) = (\cos\ t, \sin\ t, t)$ e $F\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;

   (b) $G(t) = (t^2, t)$ e $G(1)$;

   (c) $F(t) = (t, t^2, t^3)$ e $F(1)$;

   (d) $G(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3t^2)$ $G(\pi)$.

5. Seja F definida no intervalo I e com valores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $F'(t) = \vec{0}$ para todo $t \in I$. Prove que existe uma constante $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(t) = k$ para todo t em I.

6. Calcule a derivada das funções vetoriais a seguir:

   (a) $r(t) = (t\sin t, t^2, t\cos 2t)$

   (b) $r(t) = (t, t^2, t^8, t^{16}, .., t^{512})$

   (c) $F(t) = (\arctan(t^2 + 1), 2t\ln(t^2), 3t)$

7. Calcule as integrais a seguir:

   (a) $\int_0^1 (16t^3\vec{i} + 9t^2\vec{j} - \cos t\ \vec{k})\ dt$;

   (b) $\int_0^1 \left(\dfrac{4}{1+t^2}\vec{j} + \dfrac{2t}{1+t^2}\vec{k}\right)\ dt$;

   (c) $\int_1^2 (t^2)\ \vec{i} + t\sqrt{t-1}\ \vec{j} + t\sin\pi\vec{k}dt$.

8. Seja $F : I \to \mathbb{R}^3$ derivável até 2^{a} ordem no intervalo I. Suponha que exista um número rela λ tal que, para todo t em I, $\dfrac{d^2\vec{F}}{dt^2}(t) = \lambda\vec{F}(t)$. Prove que $F(t) \times \dfrac{d\vec{F}}{dt}(t)$ é constante em I.

2.2 Curvas Parametrizadas. Comprimento de arco.

9. Mostre que as retas tangente à curva parametrizada regular (isto é, cujo vetor tangente é não nulo) $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ fazem um ângulo constante com a reta $y = 0$, $z = x$.

10. Uma haste presa na origem do plano xy , ocupa a posição na reta $x = ty$. A haste intercepta a reta $y = 4$ no ponto S e a elipse $x^2 + (y-2)^2 = 4$ no ponto Q. Quando t varia, o vértice P do triângulo retângulo também varia.
    (a) Determine as equações paramétricas dessa curva em função do parâmetro t.
    (b) Faça um esboço da curva.
    (c) Determine sua equação cartersiana.

11. A astróide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ tem equações paramétricas $x = 2cos^3 t$ e $y = 2\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$. Escreve a equação da reta tangente à astróide em $t = \dfrac{\pi}{4}$.

12. Se $\sigma(t)$ $(t \in I)$ é uma parametrização da reta, então mostre que $\sigma'(t)$ é paralelo a $\sigma''(t)$.

13. Encontre uma curva parametrizada $\alpha(t)$ cujo traço seja o círculo $x^2 + y^2 = 1$ de maneira que $\alpha(t)$ percorra o círculo no sentido anti-horário e tenhamos $\alpha(0) = (0, 1)$.

14. Considere uma curva parametrizada $\alpha(t)$ tal que seua derivada segunda $\alpha''(t)$ seja identicamente nula. O que podemos dizer sobre α?

15. Seja $\alpha : (-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t}\right)$$

    (a) Para $t = 0$, α é tangente ao eixo Ox.
    (b) Quando $\longrightarrow +\infty$, $\alpha(t) \longrightarrow (0, 0)$ e $\alpha'(t) \longrightarrow (0, 0)$.
    (c) Esboce esta curva utilizando o software *win.plot.*

16. Suponha que $||\vec{v}(t)|| \neq 0$ para todo t. Faça $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{v}(t)}{v(t)}$ onde $v(t) = ||\vec{v}(t)||$. Prove que :
    (a) $\vec{T}$ e $\dfrac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais
    (b) $\vec{a} = v\dfrac{d\vec{T}}{dt} + \dfrac{v(t)}{dt}\vec{T}$, onde $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$

17. Calcule o comprimento da curva dada.
    (a) $\gamma(t) = (t\cos\ t, t\sin\ t), t \in [0, 2\pi]$;
    (b) $\gamma(t) = (t, 2t, t^2), t \in [1, 2]$;
    (c) $\gamma(t) = (-1, -t^2, t^3, 2)$, $t \in [0, 1]$;
    (d) $\gamma(t) = (t, \ln t)$, $t \in [1, e]$.

18. Reparametrize as curvas dadas, pelo comprimento de arco.
    (a) $\gamma(t) = (2t, t^2, t),\ t \geq 0$;
    (b) $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)\ t \geq 0$;
    (c) $\gamma(t) = (2t+1, 3t-1),\ t \geq 0$;
    (d) $(\cos t, \sin t, t),\ t \geq 0$.

2.3 Campos Vetoriais

19. Esboce os campos vetoriais a seguir.

(a) $F(x,y) = x^2\vec{i} + y^2\vec{j}$;

(b) $F(x,y) = \dfrac{y\vec{i} + x\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(c) $F(x,y,z) = \vec{j} - \vec{i}$;

(d) $F(x,y,z) = -y\vec{k}$.

20. Determine o campo vetorial gradiente de f

(a) $f(x,y,z) = \ln(x+2y)$;

(b) $f(x,y) = x^{\alpha}e^{-\beta x}$;

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(d) $f(x,y,z) = x\cos(\frac{z}{y})$.

21. Determine se **F** é ou não um campo vetorial conservativo e, em caso afirmativo, determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \bigtriangledown f$.

(a) $F(x,y) = (2x-3y)\ \vec{i} + (-3x+4y-8)\ \vec{j}$;

(b) $F(x,y) = e^x\cos y\ \vec{i} + e\cos y\ \vec{j}$;

(c) $F(x,y) = (e^x\sin\ y)\ \vec{i} + e\cos y\ \vec{j}$;

(d) $F(x,y) = (3x^2-2y^2)\ \vec{i} + (4xy+4)\ \vec{j}$;

(e) $F(x,y) = (xy\cos xy + \sin xy)\ \vec{i} + (e^x + x^2\cos xy)\ \vec{j}$;

(f) $F(x,y) = (\ln y + 3xy^3)\ \vec{i} + (3x^2y^2 + \dfrac{x}{y})\ \vec{j}$.

22. Determine o rotacional e o divergente do campo vetorial dado.

(a) $F(x,y,z) = xyz\vec{i} - x^2y\vec{j}$;

(b) $F(x,y,z) = x^2y\ \vec{i} + xy^2z\ \vec{j} + xyz^2\ \vec{k}$;

(c) $F(x,y,z) = e^x\sin y\ \vec{i} + e^x cosy\ \vec{j} + z\ \vec{k}$;

(d) $F(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\ \vec{i} + ye^z\ \vec{j} + k\ \vec{k})$;

(e) $F(x,y,z) = (\ln x, \ln(xy), \ln(xyz)$.

23. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$F(x,y,z) = f(x)\ \vec{i} + g(y)\ \vec{j} + h(z)\ \vec{k}$$

onde f, g e h são diferenciáveis, é irrotacional.

24. Mostre que qualquer campo vetorial da forma

$$F(x,y,z) = f(y,z)\ \vec{i} + g(x,z)\ \vec{j} + h(x,y)\ \vec{k}$$

é incompressível.

25. Mostre que, se um campo vetorial $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ é consevativo e P, Q, R têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas, então :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

3 Integrais de Linha

3.1 Integrais de linha de funções escalares.

1. Calcule a integral de linha onde C é a curva dada.

(a) $\int_C y^3\ ds$, $C : x = t^3, y = t, 0 \le t \le 2$;

(b) $\int_C xy\ ds$, $C : x = t^2, y = 2t, 0 \le t \le 1$;

(c) $\int_C xy^4\ ds$, C é a metade direita do círculo $x^2+y^2 = 16$;

(d) $\int_C xyz^2\ ds$, C é o segmento de reta de $(-1,5,0)$ a $(1,6,4)$;

(e) $\int_C z\ dx + x\ dy + y\ dz$, $C : x = t^2, y = t^3, z = t^2, 0 \le t \le 1$;

(f) $\int_C x^2\, dx + y^2\, dy + z^2\, dz$, C consiste nos segmentos de reta de $(0,0,0)$ a $(1,2,-1)$ e $(1,2,-1)$ a $(3,2,0)$;

2. Um arame fino é entortado no formato da semicircunferência $x^2 + y^2 = 4$, $x \geq 0$. Se a densidade linear for uma constante k, determine a massa e o centro de massa do arame.

3. Um arame fino tem a forma da parte que está no primeir quadrante da circunferência com centro na origem e raio a. Se a função densidade for $\rho(x,y) = kxy$, encontre a massa e o centro de massa do arame.

3.2 Integrais de linha de Campos vetoriais.

4. Calcule a integral $\int_C F \cdot dr$, onde C é a curva dada pela função vetorial $r(t)$.

   (a) $F(x,y) = xy\vec{i} + 3y^2\vec{j}$, $r(t) = 11t^4\vec{i} + t^2\vec{j}$, $0 \leq t \leq 1$

   (b) $F(x,y,z) = \sin x\ \vec{i} + \cos y\ \vec{j} + xz\ \vec{k}$, $r(t) = t^2\ \vec{i} + t^3\ \vec{j} + t^2\ \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

   (c) $F(x,y,z) = z\ \vec{i} + y\ \vec{j} - x\ \vec{k}$, $r(t) = t\ \vec{i} + \sin t\ \vec{j} + \cos t\ \vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

   (d) $F(x,y,z) = x^2\ \vec{i} + y^2\ \vec{j} + z^2\ \vec{k}$, $r(t) = (2\cos t, 3\sin t, t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

5. Uma partícula move-se no plano de modo que no instante t sua posição é dada por $\gamma(t) = (t, t^2)$. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $F(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$ no deslocamento da partícula de $\gamma(0)$ até $\gamma(1)$.

6. Calcule $\int_C \vec{E} \cdot dl$ em que $E(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} \dfrac{x\ \vec{i} + y\ \vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\gamma(t) = (t,1)$ para $-1 \leq t \leq 1$.

7. Determine o trabalho realizado pelo campo de força $\mathbf{F}(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y)$ sobre uma partícula que se move ao longo do segmento de reta que vai de $(1,0,0)$ a $(3,4,2)$.

3.3 O Teorema Fundamental das Integrais de Linha.O Teorema de Green

8. Determine uma função f tal que $\mathbf{F} = \bigtriangledown f$ e use isto para calcular $\int_C F \cdot dr$ sobre a curva C dada.

   (a) $F(x,y) = x^2\ \vec{i} + y^2\ \vec{j}$, C é o arco da parábola $y = 2x^2$ de $(-1,2)$ a $(2,8)$;

   (b) $F(x,y) = xy^2\ \vec{i} + x^2y\ \vec{j}$, C: $r(t) = (t + \sin \frac{1}{2}\pi t, t + \cos \frac{1}{2}\pi t)$, $0 \leq t \leq 1$;

   (c) $F(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x^2}\ \vec{i} + 2y \arctan x\ \vec{j}$, C: $r(t) = (t^2, 2t)$, $0 \leq t \leq 1$;

   (d) $F(x,y,z) = yz\ \vec{i} + xz)\ \vec{j} + (xy+2z)\vec{k}$, C é o segmento de reta de $(1,0,-2)$ a $(4,6,3)$.

9. Seja $F = \bigtriangledown f$, onde $f(x,y) = sen(x-2y)$. Determine as curvas C_1 e C_2 que não sejam fechadas e satisfaçam a equação :

   (a) $\int_{C_1} F \cdot dr = 0$;

   (b) $\int_{C_2} F \cdot dr = 1$.

10. Use o teorema de Green para calcular $\int_C F \cdot dr$ (Verifique a orientação da curva antes de aplicar o teorema.)

    (a) $F(x,y) = (\sqrt{x} + y^3, x^2 + \sqrt{y})$ Considerando C como sendo o arco da curva $y = senx$ de $(0,0)$ a $(\pi, 0)$;

    (b) $F(x,y) = (y^2 \cos x, x^2 + 2y \sin x)$ onde C é o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,3)$ e $(0,3)$;

    (c) $F(x,y) = (e^x + x^2y, e^y - xy^2)$ onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, orientada no sentido horário.

11. Se C é o segmento de reta ligando o ponto (x_1, y_1) ao ponto (x_2, y_2) mostre que

$$\int_C xdy - ydx = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Se os vértices de um polígono, na ordem anti-horária, são $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ mostre que a área do polígono é

$$A = \frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + (x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1})].$$

Calcule a área do pentágono com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 3)$,$(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

12. Use o Teorema de Green para achar o trabalho realizado pela força $F(x, y) = x(x + y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ ao mover uma partícula da origem ao longo do eixo x até $(1, 0)$, em seguida ao longo de um segmento de reta até $(0, 1)$, e então de volta à origem ao longo do eixo y.

13. Determine a área delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

14. Use o Teorema de Green sob a forma

$$\oint_C F \cdot n \; ds = \iint_D \text{div}F(x, y) \; dA \tag{1}$$

para mostrar a **Primeira Identidade de Green**:

$$\iint_D f \; \nabla^2 \; g \; dA = \oint f(\nabla g) \cdot n \; ds - \iint_D \nabla f \cdot \nabla g \; dA. \tag{2}$$

15. Use a Primeira Identidade de Green para mostrar demonstrar a segunda identidade de Green

$$\int\int_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)dA.$$

4 Integrais de Superfícies

4.1 Superfícies Parametrizadas. Plano Tangente.

1. Identifique a superfície que tem a equação paramétrica dada.
   (a) $r(u, v) = (u + v) \; \vec{i} + (3 - v) \; \vec{j} + (1 + 4u + 5v) \; \vec{k}$;
   (b) $r(u, v) = 2 \sin u \; \vec{i} + 3 \cos u \; \vec{j} + v \; \vec{k}$;
   (c) $r(x, \theta) = (x, x\cos\theta, x\sin\theta)$;
   (d) $r(x, \theta) = (x, \cos\theta, \sin\theta)$;
   (e) $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \; (u, v) \in \mathbb{R}^2$;
   (f) $\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u - v), \; u \geq 0, v \geq 0 \quad \text{e} u + v \leq 1$.

2. Determine uma representação paramétrica para a superfície:
   (a) O plano que passa pelo ponto $(1, 2, -3)$ e contém os vetores $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$;
   (b) A metade inferior do elipsóide $2x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$;
   (c) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $z = -2$ e $z = 2$;
   (d) A parte do plano $z = x + 3$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$;

(e) Descrita pelo conjunto $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 4y^2 = 1\}$;

(f) Obtida pela rotação em torno do eixo z da curva $y = 0$ e $z = \frac{1}{x}$, $x > 0$;

(g) A parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ que está entre os planos $z = -2$ e $z = 2$.

(h) A parte do parabolóide elíptico $x + y^2 + 2z^2 = 4$ que está em frente ao plano $x = 0$.

3. Determine a equação do plano tangente à superfície parametrizada dada no ponto especificado.

   (a) $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$; no ponto $(2, 3, 0)$.

   (b) $r(u,v) = u^2\ \vec{i} + 2u\sin\ v\ \vec{j} + u\cos v\ \vec{k}$ no ponto $u = 1, v = 0$.

   (c) $\sigma(u,v) = (u - v, u^2 + v^2, uv)$, no ponto $\sigma(1,1)$.

4.2 Área de superfícies.

4. Determine a área da superfície. Faça um esboço da superfície dada.

   (a) A parte do plano $3x + 2y + z = 6$ que está no primeiro octante;

   (b) A parte da superfície $z = xy$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$;

   (c) A parte do parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$ que está entre os cilindros $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$;

   (d) A parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está abaixo do plano $z = 9$;

   (e) $\sigma(u,v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$ onde $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq u$;

   (f) $\sigma(u,v) = (\cos u, v, \sin u)$, $u^2 + 4v^2 \leq 1$.

5. Seja A o conjunto $\{(0,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 + (y-2)^2 = 1\}$ ache a área da superfície gerada pela rotação em torno do eixo Oz do conjunto A.

6. Calcule a área da parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que se encontra dentro do parabolóide $z = x^2 + y^2$.

7. Calcule a área da superfície $z = x^{3/2} + y^{3/2}$, $\quad x^2 + y^2 \leq 2x, x \leq 1, y \leq 0$.

8. Calcule a área da parte do parabolóide elíptico $z = x^2 + 2y^2$, que se encontra dentro do cilindro $4x^2 + 16y^2 \leq 1$.

4.3 Integrais de superfícies

Calcule $\displaystyle\int\int_\sigma f(x,y,z)dS$

1. $f(x,y,z) = x$ e $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 + v), 0 \leq u \leq 1$ e $u^2 \leq v \leq 1$;

2. $f(x,y,z) = xy$ e $\sigma(u,v) = (u - v, u + v, 2u + v + 1)$, $0 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq u$;

3. $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$; $u^2 + v^2 \leq 1$;

4. $f(x,y,z) = xy$ onde σ é a intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o conjunto $x^2 + y^2 \leq 2x$, $y \geq 0$;

5. $f(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2}$ e σ é a parte da superfície cilíndrica $z^2 + x^2 = 1$ que se encontra dentro do cone $z \geq \sqrt{x^2 - y^2}$;

6. $f(x,y,z) = yz$, onde σ é a parte do plano $x + y + z = 1$ que está no primeiro octante;

7. $f(x,y,z) = y^2$, onde σ é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy;

8. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ onde σ é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que está entre os planos $z = 0$ e $z = 2$, juntamente com os discos do fundo e do topo.

9. A temperatura em um ponto (x,y,z) em uma substância com condutividade $K = 6,5$ é $u(x,y,z) = 2y^2 + 2z^2$. Determine a taxa de trnasmissão de calor nessa substância para dentro da superfície cilíndrica $y^2 + z^2 = 6$, $0 \leq x \leq 4$.

10. Calcule o centro de massa da superfície homogênea (densidade constante) dada por $\sigma(u,v) = (u, v, u^2 + v^2), u^2 + v^2 \leq 1$.

4.4 Orientação. Interais de Superfícies de Campos Vetoriais

11. Calcule a integral de superfície $\int\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para o campo vetorial F e a superfície orientada S.

    (a) $F(x,y,z) = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ e S é a parte do parabolóide $Z = 4 - x^2 - y^2$ que está acima do quadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, com orientação para cima;

    (b) $F(x.y,z) = y\vec{i} + x\vec{j} + z^2\vec{k}$, em que S é o helicóide com equação $r(u,v) = (u\cos v, u\sin v, v)$, $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \pi$, com orientação para cima;

    (c) $F(x,y,z)xz2^y\vec{i} - xze^y\vec{j} + z\vec{k}$, em que S é a parte do plano $x + y + z = 1$ no primeiro octante com orientação para baixo;

    (d) $F(x,y,z) = x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}$ onde S é o cubo com vértices $(\pm1, \pm1, \pm1)$, com orientação para fora.

12. Um fluido tem densidade $870kg/m^3$ e escoa com velocidade $v = z\vec{i} + y^2\vec{j} + x^2\vec{k}$, onde x, y, z são medidos em metros e as componentes de v em metros por segundo. Encontre a vazão para fora do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 1$.

13. Determine o fluxo de
$$F(x,y,z) = \sin(xyz)\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^2e^{x/5}\vec{k} \tag{3}$$
através da parte do cilindro $4y^2 + z^2 = 4$ que está acima do plano xy e entre os planos $x = -2$ e $y = 2$, com orientação para cima.

14. Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está acima do plano $z = 4$. Se S tiver densidade constante k, encontre o centro de massa e o momento de inércia em torno do eixo z.

4.5 O Teorema de Stokes. O Teorema do Divergente.

15. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_S \text{rot } F \ dS$

    (a) $F(x,y,z) = 2y\cos\ z\vec{i} + e^x\sin\ z\vec{j} + xe^y\vec{k}$, S é o hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$ orientado para cima;

    (b) $F(x,y,z) = (x^2z^2, y^2z^2, xyz)$ S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientado para cima;

    (c) $F(x,y,z) = x^2y^3z\vec{i} + \sin(xyz)\vec{j} + xyz\vec{k}$, S é a parte do cone $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre os planos $y = 0$ e $y = 3$, orientado na direção positiva do eixo y;

16. Use o Teorema de Stokes para calcular $\int_C Fdr$. Em cada caso C é orientada no sentido anti horário quando vista de cima.

    (a) $F(x,y,z) = (x + y, y + z, z + x^2)$, em que C é o triângulo com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$;

(b) $F(x,y,z) = e^{-x}\vec{i} + e^{x}\vec{j} + e^{z}\vec{k}$. Onde C é a fronteira da parte do plano $2x + y + 2z = 2$ no primeiro octante;

(c) $F(x,y,z) = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + e^{xz}\vec{k}$, C é a circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $z = 5$;

(d) $F(x,y,z) = xy\vec{i} + 2z\vec{j} + 3y\vec{k}$, C é a intersecção do plano $x + z = 5$ e do cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

17. Seja C uma curva fechada simples lisa que está no plano $x + y + z = 1$. Mostre que a integral de linha

$$\int_C z\ dx - 2x\ dy + 3z\ dz \tag{4}$$

depende apenas da área da região enlgobada por C e não da forma de C ou de sua posição no plano.

18. Se S é uma esfera e F satisfaz as hipóteses do Teoream de Stokes, mostre que $\int\int_s \text{rot}F\ dS = 0$.

19. Suponha que C satisfaça as condições do Teorema de Stokes e f, g sejam funções com derivadas parciais contínuas de segunda ordem. Mostre que

(a) $\displaystyle\int_C (f\nabla g) \cdot dr = \int\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot dS$;

(b) $\displaystyle\int_C (f\nabla f) \cdot dr = 0$.

20. Use o Teorema do Divergente para calcular $\int\int_S F \cdot dS$

(a) $F(x,y,z) = e^x \sin y\vec{i} + e^x \cos y\vec{j} + yz^2\vec{k}$;

(b) $F(x,y,z) = x^2z^3\vec{i} + 2xyz^3\vec{j} + xz^4\vec{k}$, S é a superfície da caixa de vértives $(\pm1, \pm2, \pm3)$;

(c) $F(x,y,z) = 3xy^2\vec{i} + xe^z\vec{j} + z^3\vec{j}$, S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $y^2 + z^2 = 1$;

(d) $F(x,y,z) = x^2y\vec{i} + xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$ onde S é a superfície do tetraedro limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$ e $x + 2y + z = 2$.

21. Use o Teorema do Divergente para calcular $\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x,y,z) = z^2x\vec{i}$ e S é a metade de cima da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

22. Demonstre os itens a seguir, supondo que S e E satisfazem a condições do Teorema do Divergente e que as funções escalares e as componentes dos campos vetoriais tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

(a) $\displaystyle\int\int_S a \cdot n dS = 0$, onde a é um vetor constante;

(b) $V(E) = \frac{1}{3}\int_S F dS$ onde $F(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$;

(c) $\displaystyle\int\int D_n f dS = \int\int\int_E \nabla^2 f dV$.